19-11-15

Επαναληπτικές Μέθοδοι.

Οι επαναλ. μέθοδοι συνίστανται στην κατασκευή ακολουθίας $\{x_n\}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ τη λύση του συστήματος $Ax=b$.

Κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι.

Για τη λύση του συστήματος $Ax=b$, διαχωρίζουμε τον A ως $A=M-N$, ώστε M να'ναι αντιστρέψιμος και να αντιστρέφεται με κόστος κατά τάξη μεγέθους μικρότερου του A.

$$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}\cdot Nx+b\cdot M^{-1} = x=Tx+c,$$ Τ επαναληπτικός πίνακας.

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)}+b, \quad k=0,1,2\ldots \quad x^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}\cdot Nx^{(k)} + M^{-1}\cdot b \quad , k=0,1,2,\ldots, x^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

Αν η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει στη λύση του συστήματος.

$$\left.\begin{array}{l} x=Tx+c \\ x^{(k+1)} = T\cdot x^{(k)}+c \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} e^{(k+1)} = x^{(k+1)}-x = T(x^{(k)}-x) = T\cdot e^{(k)}$$ επαγωγικά:

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}, \quad e^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

Για να συγκλίνει πρέπει $\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^k\cdot e^{(0)} = 0, \forall\, e^{(0)}\in\mathbb{R}^n$.

<u>Λήμμα</u>: Η ακολουθία των δυνάμεων του T, $\{T^k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον μηδενικό πίνακα αν-ν $\rho(T)<1$.

<u>Απόδειξη.</u>

Αν $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$ τότε για κάποια φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ θα υπάρχει k_0 ώστε $\|T^k\|<1$ $\forall\, k\geq k_0$, τότε $\rho(T^k)\leq \|T^k\|<1 \Rightarrow (\rho(T))^k = \rho(T^k)<1 \Leftrightarrow \rho(T)<1$.

<u>Αντίστροφα</u>: Αν $\rho(T)<1$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists$ φυσική $\|\cdot\|$ ώστε $\|T\|\leq\rho(T)+\varepsilon$, επιλέγουμε $\varepsilon<1-\rho(T)$, τότε $\|T\|\leq\rho(T)+\varepsilon<1$.

$$\lim_{k\to\infty}\|T^k\| = \lim_{k\to\infty}\|T\|^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} T^k = 0.$$

Θεώρημα: Ικανή κ' αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ στη λύση του συστήματος $Ax=b$ είναι η $\rho(T)<1$, όπου $T=M^{-1}N$ ο επαναληπτικός πίνακας.

Απόδειξη.

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)} \quad \forall\, e^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

Αν $e^{(0)}=e^j$ όπου e^j η j στήλη του μοναδιαίου πίνακα, τότε ως $e^{(k)}$ θα πάρουμε την j στήλη του T^k, η ακολουθία τότε θα συγκλίνει αν-ν το όριο της j στήλης του T^k είναι το μηδενικό διάνυσμα αυτό $\forall\, j=1(1)n$, που σημαίνει $\lim_{k\to\infty} T^k=0$.

Πόρισμα: Αν για κάποια φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ ισχύει $\|T\|<1$, τότε η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει. $\rho(T) < \|T\| < 1 \Rightarrow$ συγκλίνει.

Πόρισμα: Αν για κάποια φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ υπάρχει k τ.ω. $\|T^k\|<1$, τότε η επαναλ. μέθοδος συγκλίνει. $(\rho(T))^k = \rho(T^k) \le \|T^k\| < 1 \Rightarrow \rho(T)<1$.

Ορίζουμε μέση ταχύτητα σύγκλισης για k επαναλήψεις, την ποσότητα:
$R(T^k) = -\log(\|T^k\|)^{1/k} = -\frac{\log\|T^k\|}{k}$.

Ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης: $R_\infty(T)=\lim_{k\to\infty} R(T^k) = -\log(\rho(T))$.

Μέθοδος Jacobi.

Θεωρούμε το διαχωρισμό $A=D-L-U$, D το διαγώνιο μέρος του A, $a_{ii}\neq 0$, $i=1(1)n$, τότε για $M=D$ κ' $N=L+U$ έχουμε την επαναλ. μέθοδο Jacobi.

$$Dx^{(k+1)}=(L+U)x^k+b,\ k=0,1,2,\dots,\ x^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

ή $x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^k+D^{-1}b$, $k=0,1,2,\dots$, $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, $T_J=D^{-1}(L+U)$.

$$x_i^{(k+1)} = \Big[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big]/a_{ii},\quad i=1(1)n.$$

Μέθοδος Gauss-Seidel.

$A=D-L-U$, $M=D-L$, $N=U$, $a_{ii}\neq 0$, $i=1(1)n$

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b,\ k=0,1,2,\dots,\ x^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

ή $x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$, $k=0,1,2,\dots$, $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, $T_{GS}=(D-L)^{-1}U$

$$x_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]/a_{ii} \qquad , i=1(1)n.$$

Τεχνική Παρεκβολής (Extrapolation)

Για το γραμμ. σύστημα $Ax=b$, θεωρούμε $A=M-N$ και κατασκευάζουμε την επαναληπτική μέθοδο $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$, $k=0,1,2,\dots$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Έστω $M_w = \frac{1}{w} \cdot M$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και τον διαχωρισμό $A = M_w - N_w \Leftrightarrow$

$N_w = M_w - A = \frac{1}{w} \cdot M - (M-N) = \frac{1-w}{w} M + N$.

Θεωρώ την επαναλ. μέθοδο $M_w x^{(k+1)} = N_w x^{(k)} + b$ με επαν. πίνακα $T_w = M_w^{-1} N_w$.

$$T_w = M_w^{-1} \cdot N_w = w \cdot M^{-1} \left[\frac{1-w}{w} \cdot M + N\right] = (1-w) I + w M^{-1} \cdot N = (1-w) I + w \cdot T.$$

Αν λ ιδιοτιμή του T, τότε $\mu = 1 - \omega + \omega\lambda$.

Πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \max_{1 \le i \le n} |1 - w + w\lambda_i|$$

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του επαν. T είναι πραγματικές τέτοιες ώστε

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$ και έστω $w > 0$.

Τότε οι ιδιοτιμές του T_w θα 'ναι $= 1 - w + w\lambda_i = 1 - w(1-\lambda_i)$, $i = 1(1)n$, με διάταξη $1 - w(1-\lambda_1) \le 1 - w(1-\lambda_2) \le \dots \le 1 - w(1-\lambda_n)$.

Συνθήκη Σύγκλισης : $-1 < 1 - w(1-\lambda_1) \le 1 - w(1-\lambda_n) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n < 1. \\ w \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) \end{cases}$

$-1 < 1 - w(1-\lambda_1) \Leftrightarrow -2 < -w(1-\lambda_1) \Leftrightarrow w < \frac{2}{1-\lambda_1}$.

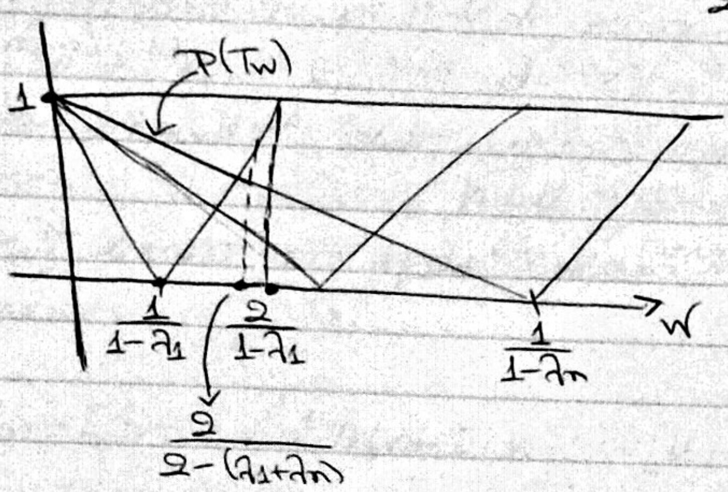
Θεωρούμε τη συνάρτηση sign ($\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \\ -1 & \text{αν } x<0 \end{cases}$)

$$\operatorname{sign}(|1-w(1-\lambda_1)| - |1-w(1-\lambda_n)|) = \operatorname{sign}\left((1-w(1-\lambda_1))^2 - (1-w(1-\lambda_n))^2 \right) =$$
$$= \operatorname{sign}[w(\lambda_1-\lambda_n)[2 - w(2-(\lambda_1+\lambda_n)]] = \operatorname{sign}[w(2-(\lambda_1+\lambda_n)) - 2]$$

$$\rho(T_w) = \begin{cases} |1-w(1-\lambda_n)| = 1 - w(1-\lambda_n) \downarrow \text{ αν } w \in \left(0, \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}\right] \\ |1-w\cdot(1-\lambda_1)| = w(1-\lambda_1) - 1 \uparrow \text{ αν } w \in \left[\frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) \end{cases} \Rightarrow w_b = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$$

$$p(T_{w_\beta}) = 1 - \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_2)}(1-\lambda_n) = \frac{2-(\lambda_1+\lambda_n)-2+2\lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$$

$$p(T_{w_\beta}) = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(1-\lambda_1) - 1 = \frac{2-2\lambda_1-2+\lambda_1+\lambda_2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$$



$$w<0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 > 1 \\ w \in \left(\frac{2}{1-\lambda_n}, 0\right) \end{cases} \qquad w_\beta = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}, \; p(T_w) = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_n-2}$$

<u>Άσκ.</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(T_J - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} i \end{cases} \Rightarrow p(T_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{ συγκλίνει!}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \longrightarrow = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \left[(D-L)^{-1}\right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & -1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot \left[(\lambda - \tfrac{1}{2})(\lambda+1) + \tfrac{1}{2} \right] = \lambda\left(\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda\right) = \lambda^2\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1/2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho(T_{GS}) = \frac{1}{2} < 1.$$

<u>Περιοχή σύγκλισης της παρεκβαλλόμενης Gauss-Seidel.</u>

$$w \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$w_b = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} = \frac{2}{2-(-\frac{1}{2}+0)} = \frac{4}{5}.$$

$$\rho(T_{w_b}) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} = \frac{0-(-1/2)}{2-(-1/2+0)} = \frac{1}{5}.$$